MA12 - Unidade 22
A Desigualdade das Médias

Paulo Cezar Pinto Carvalho

PROFMAT - SBM

4 de Abril de 2014

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

PROFMAT

A desigualdade das médias

- **Teorema:** Sejam A, G e H, respectivamente, as médias aritmética, geométrica e harmônica de n valores positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
  a) $A \geq G \geq H$
  b) a igualdade só ocorre quando todos os valores são iguais

- Observação: $G \geq H$ decorre de $A \geq G$

$A \geq G \Rightarrow$

$\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots\frac{1}{x_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdots \frac{1}{x_n}} \Rightarrow$

$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots\frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \Rightarrow$

$H \leq G$

O caso $n = 2$

- Sejam x_1 e x_2 números positivos

  $A - G = \frac{x_1+x_2}{2} - \sqrt{x_1 x_2}$

  $= \frac{x_1+x_2-2\sqrt{x_1 x_2}}{2}$

  $= \frac{(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2}{2} \geq 0$

  Além disso, a igualdade só ocorre quando $x_1 = x_2$.

O caso $n = 2^k$

- A prova é feita por indução.
  - Vale para $k = 1$ (corresponde a $n = 2$).
  - Suponhamos válida para $n = 2^k$; vamos mostrar que vale para $2n = 2^{k+1}$.

    $$A = \frac{x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{2n}}{2n}$$

    $$= \frac{\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} + \frac{x_{n+1}+\ldots+x_{2n}}{n}}{2}$$

    $$\geq \frac{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} \cdots x_{2n}}}{2}$$

    $$\geq \sqrt[2n]{x_1 \cdots x_n \cdot x_{n+1} \cdots x_{2n}} = G$$

    Além disso, a igualdade só vale quando

    $x_1 = \ldots = x_n$, $x_{n+1} = \ldots = x_{2n}$ e $x_1 \cdots x_n = x_{n+1} \cdots x_{2n}$,

    ou seja, quando $x_1 = \ldots = x_n = x_{n+1} = \ldots = x_{2n}$.
  - Logo, a propriedade é também válida para $2n = 2^{k+1}$.
- Por indução, a desigualdade das médias vale para todo n da forma 2^k.

O caso geral

- A prova consiste em completar a lista com valores iguais à média aritmética dos n números, até o número de valores tornar-se uma potência de 2.
- Ilustramos para $n = 3$, quando completamos a lista x_1, x_2, x_3 com um quarto valor igual a $A = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$.

$$A = \frac{x_1+x_2+x_3+A}{4} \geqslant \sqrt[4]{x_1x_2x_3A}$$

$$A^4 \geqslant x_1x_2x_3A$$

$$A^3 \geqslant x_1x_2x_3$$

$$A \geqslant \sqrt[3]{x_1x_2x_3} = G$$

Além disso, a igualdade só vale quando $x_1 = x_2 = x_3$.

Exemplo

- Mostre que, entre todos os retângulos de perímetro $2p$, o quadrado é o de maior área.
- Se os lados do retângulo são x e y, temos $x + y = p$, isto é, a média aritmética de x e y é igual a $\dfrac{p}{2}$.
- A área do retângulo é $S = xy$.
- Pela desigualdade das médias:
  $\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$, ou seja, $\sqrt{S} \leqslant \frac{p}{2}$.
- Logo, $S \leqslant \frac{p^2}{4}$ e a igualdade só é obtida quando $x = y$.
- Portanto, o retângulo de maior área é o quadrado de lado $\frac{p}{2}$ e área $p^2/4$.

Exemplo

- Qual é o valor mínimo da área total de um bloco retangular de volume 64 cm^3 ? Quais são as dimensões do bloco neste caso?
- Se as dimensões do bloco são a, b e c, temos $V = abc = 64$ e $S = 2(ab + ac + bc)$.
- Aplicando a desigualdade das médias aos números ab, ac e bc, temos:

  $\frac{ab+bc+ac}{3} \geq \sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ac}$

  $\frac{S}{6} \geq \sqrt[3]{V^2} = \sqrt[3]{64^2} = 16$

- Logo, $S \geq 6 \times 16 = 96$ cm^2.
- A igualdade ocorre quando $ab = ac = bc$, ou seja, quando $a = b = c$.
- Portanto, o valor mínimo da área é igual a 96 cm^2 e ocorre quando o bloco é um cubo de aresta igual a $\sqrt[3]{64} = 4$ cm.