MA12 - Unidade 21
Médias e Princípio das Gavetas

Paulo Cezar Pinto Carvalho

PROFMAT - SBM

4 de Abril de 2014

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

PROFMAT

Médias

- Ideia geral de média: substituir uma lista de valores por um único valor, que preserve uma certa característica dessa lista.

- Principais médias:
  - Média aritmética: preserva a *soma* dos valores.
  - Média geométrica: preserva o *produto* dos valores.
  - Média harmônica: preserva a *soma dos inversos* dos valores.

Definições

- A *média aritmética (simples)* da lista de n números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é definida por

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

- A *média geométrica (simples)* dos n números positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é definida por

$$g = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

- A *média harmônica (simples)* dos n números positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é definida por

$$h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

Médias Ponderadas

- A *média aritmética ponderada* dos números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ com pesos respectivamente iguais a $p_1, p_2, \ldots, p_n$ é definida por

$$\frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}.$$

- Quando os pesos são inteiros não negativos, corresponde à média aritmética simples da lista em que p_1 elementos são iguais a x_1, p_2 são iguais a x_2, etc.
- Mas a definição também faz sentido quando $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são números não negativos arbitrários.
- Caso particular: quando $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$, a média aritmética ponderada reduz-se a $p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n$.

Exemplo

- Uma empresa produziu, durante o primeiro trimestre do ano passado, 500, 200 e 200 unidades, em janeiro, fevereiro e março, respectivamente. Qual foi a produção média mensal nesse trimestre?
- Queremos uma média M tal que, se a produção mensal fosse sempre igual a M, a produção trimestral seria a mesma.
  $3M = 500 + 200 + 200$

  $M = \frac{500+200+200}{3} = 300.$
- A média apropriada é a aritmética.

Exemplo

- Uma empresa aumentou sua produção durante o primeiro bimestre do ano passado. Em janeiro e em fevereiro, as taxas de aumento foram de 21% e 8%, respectivamente. Qual foi a taxa média de aumento mensal nesse bimestre?
- Queremos uma taxa média i tal que, se em todos os meses a taxa de aumento fosse igual a i, o aumento bimestral seria o mesmo.

  $(1+i)^2 = 1,21 \cdot 1,08$

  $1 + i = \sqrt{1,21 \cdot 1,08} \cong 1,1432$

  $i \cong 0,1432 = 14,32\%$ (note que a média aritmética dos aumentos é 14,5%).
- O fator de aumento médio é a média geométrica dos fatores de aumento mensais.

Exemplo

- Uma viagem de automóvel de ida e volta foi feita com uma velocidade de 48 km/h na ida e de 72 km/h na volta. Qual foi a velocidade média em todo o percurso?
- Queremos uma velocidade média v tal que, se todo o percurso (de extensão igual a $2d$) fosse feito nesta velocidade, o tempo total de viagem seria o mesmo.

  $$\frac{2d}{v} = \frac{d}{48} + \frac{d}{72}$$

  $$\frac{1}{v} = \frac{\frac{1}{48} + \frac{1}{72}}{2} = \frac{5}{288}$$

  $v = \frac{288}{5} = 57,6$ km/h (note que a média aritmética das velocidades é 60 km/h).
- A velocidade média no percurso é a média harmônica das velocidades.

Propriedade

- Se a média aritmética dos números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é igual a $\bar{x}$, pelo menos um dos números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é maior que ou igual a $\bar{x}$.
- Se $x_1 < \bar{x}$, $x_2 < \bar{x}, \cdots, x_n < \bar{x}$, teríamos

  $x_1 + x_2 + \cdots + x_n < n\bar{x}$

  $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} < \bar{x}$

  $\bar{x} < \bar{x}$

  o que é absurdo.

Exemplo

- Mostre que, em um grupo de 50 pessoas, há sempre pelo menos 5 que nasceram no mesmo mês.
- O número médio de pessoas por mês é $50 \div 12 = 4,1\ldots$.
- Logo, em algum mês o número de nascidos nesse mês (que é um inteiro) é maior que ou igual a 4,1..., ou seja, é maior que ou igual a 5.

O Princípio das Gavetas

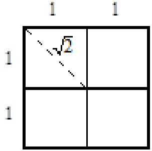
- Se $n + 1$ ou mais objetos são colocados em n ou menos gavetas, então pelo menos uma gaveta recebe mais de um objeto.
- O número médio de objetos por gaveta é maior que ou igual a $\frac{n+1}{n}$, que é maior que 1.
- Logo, em alguma gaveta haverá um número de objetos maior que 1 (ou seja, maior que ou igual a 2).

Exemplo

- Mostre que todo inteiro positivo n tem um múltiplo que se escreve apenas com os algarismos 0 e 1.
- Considere os $n+1$ primeiros números da sequência 1, 11, 111,... e os restos das divisões desses números por n. Esses restos só podem ser iguais a $0, 1, 2, \ldots, n-1$.
- Pensando nos números como objetos e nos restos como gavetas, temos mais objetos do que gavetas.
- Pelo Princípio das Gavetas, há dois números (objetos) na sequência que dão o mesmo resto (estão na mesma gaveta) quando divididos por n.
- Sejam estes números 11 ... 1 (p algarismos) e 11 ... 1 (q algarismos), $p < q$.
- A diferença desses números é um múltiplo de n e se escreve $11 \ldots 10 \ldots 0$, com p algarismos 0 e $q-p$ algarismos 1.

Exemplo

- Cinco pontos são tomados sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostre que há dois desses pontos tais que a distância entre eles é menor que ou igual a $\sqrt{2}$.
- Divida o quadrado de lado 2 em quatro quadrados de lado 1, ligando os pontos médios dos lados opostos.



- Pensando nos pontos como objetos e nos quadrados como gavetas, temos mais objetos do que gavetas.
- Pelo Princípio das Gavetas, alguma gaveta receberá mais de um objeto, isto é, haverá dois pontos no mesmo quadrado de lado 1.
- A distância entre esses pontos é no máximo igual ao comprimento da diagonal do quadrado, que é $\sqrt{2}$.